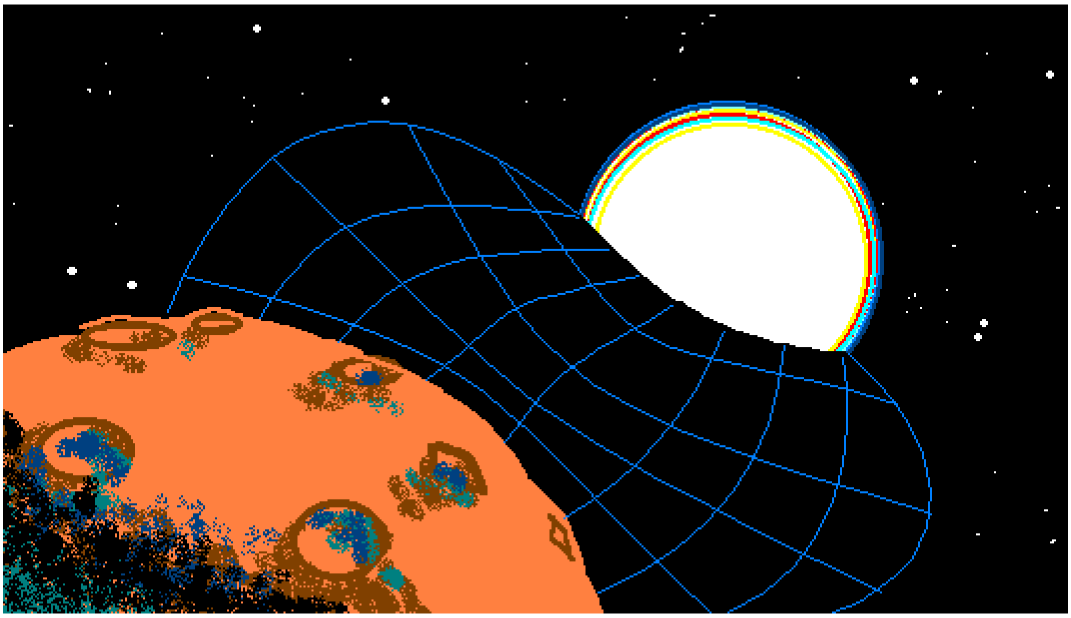
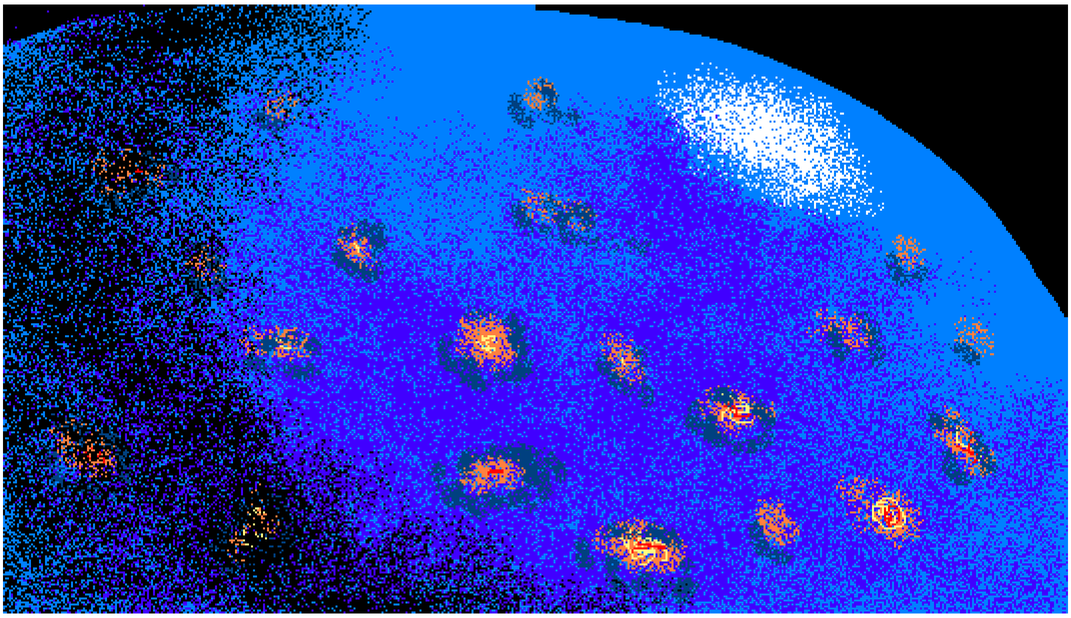


.

Der Autor dieses Artikels, Dr. Stefan von Weber, studierte Experimentalphysik an der Universität Rostock. und promovierte dort mit einem Thema zur Röntgenstrukturanalyse einatomiger Metallschmelzen. Angeregt durch die Tätigkeit als Programmierer und Problemanalytiker am Rechenzentrum der Universität Rostock erschienen später einige Arbeiten zur Theorie und Entwicklung von Programmiersprachen , die später in die Promotion zum Dr. sc. einflossen. Ein 8-jähriges Intermezzo in einem Akademieinstitut in Berlin war hauptsächlich von der Software-Entwicklung für die Qualitätssicherung in der Chip-Industrie geprägt. Seit 1991 unterrichtet er Mathematik und Regelungstechnik am Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik der FH Furtwangen. Neben der Lehre beschäftigt er sich mit naturphilosophischen Fragen und statistischer Software.. Die Kosmische Membrantheorie wurde 1994 als Ergebniss einer längeren Beschäftigung mit der Relativitätstheorie von Albert Einstein entwickelt.

.



.

Kosmische Membran – ein einfaches didaktisches Modell zur Allgemeinen Relativitätstheorie

.

1 Einführung

.

1916 publizierte Albert Einstein seine “Allgemeine Relativitätstheorie” in den “Annalen der Physik” und prägte den Begriff “Raumzeit” für die Vorstellung, dass unsere drei Raumdimensionen und die Zeit eine vierdimensionale Einheit bilden. 1921 machte der polnische Mathematiker Theodor Kaluza einen weiteren Vorstoß, indem er eine zusätzliche vierte Raumdimension postulierte und so Einsteins Gravitationstheorie mit der Maxwellschen Elektrodynamik verbinden konnte. Die physikalische Welt hat die vierte Raumdimension jedoch lange nicht akzeptiert – auch nicht, nachdem der schwedische Mathematiker Oscar Klein 1926 diese Dimension in Zylinder von Plancklänge “aufgerollt” und damit für uns unsichtbar gemacht hat. Erst in neuester Zeit, mit dem Aufkommen der String-, Membran- und Brane-Theorien, wird wieder verstärkt mit diesen Modellen gearbeitet. Einen aktuellen Beitrag von Rüdiger Vaas [1] findet man im Heft 12/2001 in “Bild der Wissenschaft”. Einer der vehementesten Vertreter der subatomaren Membrantheorien, kurz M-Theorien genannt, Michael J. Duff (1998), sei hier zitiert: “... Indeed, future terrestrial historicans may judge the late 20th century as a time when the theorist were like children playing on the the seashore, diverting themselves with the smoother pebbles or prettier shells of superstrings while the great ocean of M-theory lay undiscovered before them”.
Gerade die kosmischen Membrantheorien (Branes), scheinen dem Autor gut geeignet, Schülern in Leistungskursen der Mathematik oder Physik die Allgemeine Relativitätstheorie auf einfache Weise näher zu bringen. Die erforderlichen Kenntnisse und Fertigkeiten gehen nicht über einfache geometrische Betrachtungen, das Differenzieren oder das Umstellen einfacher Gleichungen hinaus. Auch die physikalischen Vorstellungen sind nachvollziehbar und naheliegend. Natürlich läßt sich darüber streiten, ob Schüler der Oberstufen sich mit der Allgemeinen Realtivitätstheorie auseinandersetzen müssen. Wenn sich jedoch ein Lehrinhalt für die Fachdidaktik anbietet, wie Ruschel [2] auf Seite 303 betont, weil er die emotionale Spannung (die hier von der Kosmologie und Philosophie ausgelöst wird) transportieren kann, dann lohnt sich eine methodische Aufarbeitung. Noch wichtiger erscheint dem Autor, Josef Leisen [3] zu zitieren: “Es besteht dringender Bedarf zur Weiterentwicklung der Aufgabenkultur des naturwissenschaftlichen Unterrichts.” Als Dozent für das Grundlagenfach Mathematik sieht der Autor sehr oft hervorragende mathematische Fertigkeiten, aber zu wenig anwendungsbezogenes Denkvermögen. Londa Schiebinger sagt in ihrem Buch “Frauen forschen anders”: “Die größten Physiker waren jene, die die richtigen Fragen gefragt haben. Newton fragte, warum der Mond falle (als jedermann annahm, er falle nicht), Einstein fragte, wie die Welt aussehen würde, wenn man sich mit einem Lichtstrahl fortbewegen würde.” Gerade bei Aufgabenstellungen aus anspruchsvollen Wissensgebieten, die in der Schule nur ansatzweise gelöst werden können, bleibt viel Raum für weitergehende Fragen, für eigenes Denken und für ein späteres tiefes Interesse.
Bei einem mathematisch und physikalisch so anspruchsvollem Gebiet, wie es die Allgemeine Relativitätstheorie darstellt (siehe z.B. Fließbach [4]), muss eine Einführung für Schüler speziell, modellhaft und bildlich sein. An Versuchen, spezielle Lösungen der Einsteinsche Theorie der Raumkrümmung bildlich und modellhaft darzustellen, hat es in der Vergangenheit nicht gefehlt. Am meisten verbreitet in populärwissenschaftlichen Fernsehsendungen bzw. Zeitschriftenbeiträgen ist das Gummimembranmodell der Gravitationwirkung einer kugelförmigen Zentralmasse. Eine elastische Matte wird horizontal auf einen Rahmen gespannt und in der Mitte durch eine schwere Kugel belastet. Diese vertritt unser Zentralgestirn. Die Matte bildet einen eindrucksvollen Trichter. Eine kleinere Kugel als Planetenmodell umkreist, wenn sie geschickt geworfen wird, einige Male

die “Sonne”, bevor sie auf Grund der Reibung in den Trichter stürzt. Das Modell ist sehr anschaulich, und es ist schade, dass es so nicht der physikalischen Wirklichkeit entspricht. Zwei entscheidende Mängel, abgesehen von seiner Zweidimensionalität, haften dem Modell an: Es erklärt nicht die Kraft aus der zusätzlichen Dimension - die Schwerkraft kann sich ja nicht selbst erklären – und es führt in dieser einfachen zweidimensionalen Form nicht auf Newtons Gravitationsgesetz, sondern nur auf etwas Ähnliches.
Der zweite Mangel lässt sich nach Untersuchungen des Autors (Weber [5]) sofort beheben. Wie unten gezeigt wird, folgt Newtons Gravitationsgesetz $F_G=\gamma M_1M_2/r^2$ für zwei kugelförmige Massen M_1 und M_2 im Abstand r als Näherungslösung aus dem Gummimembranmodell, sobald wir uns eine dreidimensionale Membran im vierdimensionalen Raum denken (vorstellen kann man es sich schwerlich). Um aber uns und unseren Schülern eine Modellvorstellung liefern zu können, woher nun die Kraft K, die auf die Membran einwirkt und so den Raum krümmt, kommen soll, bemühen wir das bekannte Big-Bang-Modell von George Gamov. Nach dem Urknall vor etwa 13 Milliarden Jahren begann sich unser Kosmos auszudehnen. Mit Theodor Kaluza nehmen wir modellhaft einen vierdimensionalen Raum an, in dem sich eine dreidimensionale Membran wie ein riesiger Luftballon ausdehnt. Die Oberfläche dieses Ballons ist unser Kosmos. Abbildung 1 illustriert diese absolut nicht neue Modellvorstellung.

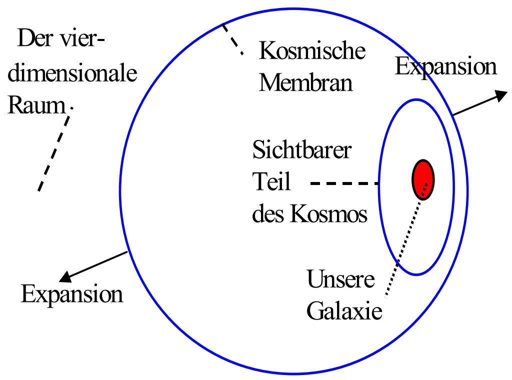


Abb. 1. Expandierender Kosmos

Dass der Raum uns insgesamt nicht gekrümmt erscheint, kann man mit der ungeheueren Größe des Kosmos erklären. Selbst die Grenzen des uns sichtbaren Bereichs können klein sein im Verhältnis zum gesamten Kosmos. Als Motor der ständigen Expansion könnte man sich die Bewegungsenergie der kosmischen Membran im vierdimensionalen Raum vorstellen. Woher kommt aber nun die Kraft K, die auf alle Materie im Kosmos einwirkt und auf diese Weise die Membran einbeult und damit krümmt? Die Physik hat bisher keine eindeutige Antwort gefunden. Es gibt verschiedene Ansätze, z.B. auf der Grundlage der Zero-Point-Energie (ZPE), die aber hier nicht diskutiert werden sollen. Der Autor schlägt vielmehr ein einfaches didaktisches Modell vor, dessen Wirkungsmechanismus Schüler intuitiv erfassen dürften. Der vierdimensionale Raum sei mit einem ‘feinen Stoff ‘ erfüllt (den Begriff Äther sollte man tunlichst vermeiden, da er auf negative Weise mit prärelativistischen Inhalten belegt ist). Diesen feinen Stoff soll eine materiefreie Membran ungehindert durchdringen können, so wie ein Tennisschläger leicht durch den Wind geht. Befindet sich jedoch Materie in der Membran, z.B. eine Sonne, ein Planet oder einfach nur ein Atom, dann soll sich der feine Stoff daran stauen und einen Druck auf die Materie ausüben. Dieser Druck sei modellhaft unsere gesuchte Kraft K aus der vierten Dimension. Die Schwerkraft Fg, die ja innerhalb der uns zugänglichen 3 Raumdimensionen wirkt, ist jetzt die einfache Tangential- oder Hangabtriebskraft, wie sie sich aus der Zerlegung von K nach einem Kräfteparallelogramm in Normalkraft und Tangentialkraft ergibt (Abb. 7).
Wichtig ist es, den Schülern gegenüber zu betonen, dass die kosmische Membran nur ein didaktisches Modell ist und dass bei der vorgestellten Methode nur eine spezielle Näherungslösung

der allgemeinen Feldgleichungen gefunden wird, dass man aber trotzdem viele Feinheiten der Allgemeinen Relativitätstheorie berechnen kann. Für den Fall einer zentralsymmetrischen Massenanordnung, wie sie von unserem Sonnensystem recht gut angenähert wird, ist nicht nur die richtige Berechnung der Raumkrümmung möglich, sondern auch die richtige Berechnung der Lichtablenkung, der Radarechoverzögerung für sonnennahe Signaltrajektorien und der relativistischen Periheldrehungen sonnennaher Planeten. Auch Fragen der Raumverdrillung und die Ausbreitung von Gravitationswellen beantwortet das Modell. Der Autor möchte sich in diesem Beitrag jedoch auf das Kernanliegen, die Berechnung der Raumkrümmung als Grundlage für das Newtonsche Anziehungsgesetz, beschränken.

2 Raumkrümmung und Newtons Gravitationsgesetz

Wir beginnen unseren Exkurs im uns wohlvertrauten 3-dimensionalen Raum und betrachten eine 2-dimensionale ideal, d.h. linear zur Belastung, dehnbare Membran (Gummihaut). Abbildung 3 zeigt den Trichter um eine Masse M, die von einer Kraft in die Membran gedrückt wird. Der Trichter ist rotationssymmetrisch, wenn die Masse kugelförmig ist und die Aufhängung der Membran weit genug entfernt ist, d.h. wir können uns in der gesuchten Gleichung auf die rechtwinkligen Koordinaten z und r beschränken. Unser Hauptziel ist das Auffinden einer Gleichung, die die Krümmung z” der Membran in Abhängigkeit vom Radius r beschreibt. Wir beschreiten dazu einen weitgehend geometrisch interpretierbaren Weg. Ausgangspunkt ist das Kräftegleichgewicht für ein kleines sattelförmiges Stück Membran, wie es Abbildung 2 zeigt. Ist die allseitige Membranspannung F sehr viel größer, als die zusätzliche Spannung, die durch eine Belastung der Membran hinzukommt, dann haben alle eingezeichneten Kräftepaare Fr-Fr und Fz-Fz fast identische Beträge. (Genau genommen zeigt weder Fr exakt in r-Richtung, sondern liegt in der Membran, noch zeigt Fz exakt in z-Richtung, denn die von den Kräftepaaren aufgespannten Ebenen stehen senkrecht aufeinander.) Als Folge muss der Winkel zwischen den beiden Kräften Fr derselbe sein, wie zwischen den beiden Kräften Fz, denn die beiden Resultierenden müssen sich aufheben, und damit müssen die Radien Rr und Rz ebenfalls gleich sein (genauer 1/Rr=1/Rz und daraus abgeleitet Rr=Rz).

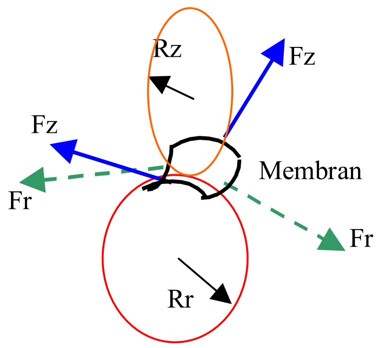


Abb. 2. Kräfte am Membranstück

Zunächst benötigen wir den Krümmungsradius R_1 aus Abbildung 3. Der Krümmungsradius R einer beliebigen Kurve z(r) in einem Punkt ist der Radius des Schmiegekreises, der sich im Punkt P=(r,z(r)) an die Kurve zeichnen lässt. Gleichung (1) gibt den Zusammenhang. Die Formel steht in allen Taschenbüchern der Mathematik (z.B. Stöcker, 1993, 444). Ihre Ableitung erfordert jedoch etwas Differentialgeometrie, so dass es der methodisch einfachere Weg ist, die Schüler diese Formel am Beispiel der Kreisgleichung $z^2+r^2=R^2$, die einen Kreis vom Radius R um den Ursprung beschreibt, prüfen zu lassen. Umstellung der Kreisformel ergibt $z=\pm(R^2-r^2)^{1/2}$. Die erste Differentiation ergibt $z'=\pm(r/z)$, die zweite Differentiation $z''=\pm((1/z)-(r^2/z^3))$. Im Punkt r=0 ist $z'=0$

und wegen z=±R wird z“=±(1/R). Eingesetzt in Gleichung (1) sehen die Schüler die gewünschte Identität für diesen Sonderfall einer sonst beliebigen Kurve z(r).

$$R_1 = \frac{(1+z'^2)^{3/2}}{|z''|} \qquad (1)$$

R_2 ist der Radius des Schmiegekreises, dessen Fläche senkrecht auf dem Kreis R_1 steht. Wir gewinnen R_2, indem wir uns einen Zylinder mit Radius R_2 vorstellen, dessen Achse in der r-z-Ebene liegt und der die Membran im selben Punkt P berührt, wie der Kreis R_1. Abbildung 4 zeigt diesen Zylinder.

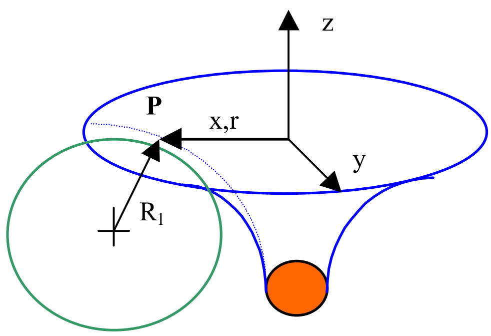


Abb. 3. Schmiegekreis R_1 im Punkt P

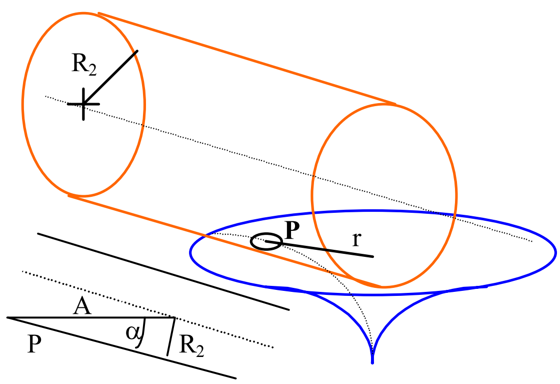


Abb. 4. Zylinder am Punkt P

Wie erhalten wir den Wert von R_2? Wir nehmen, wie es Abbildung 5 zeigt, die waagrechte Schnittellipse des Zylinders, berechnen den Krümmungsradius am Scheitelpunkt P und setzen diesen mit dem Radiusabstand r des Punktes P gleich, denn im Scheitelpunkt P sind die Krümmungsradien von Kreis und Ellipse identisch. Auf diese Weise finden wir eine direkte Beziehung zwischen R_2 und r(P). Die kleine Halbachse der Schnittellipse ist $B=R_2$, was man unmittelbar der Abbildung 5 entnehmen kann. Die Gleichung für die große Halbachse A ergibt sich aus den Verhältnissen am rechtwinkligen Dreieck (Abb. 4 unten) mit der Gegenkathete R_2, der Hypothenuse A und dem Winkel $\alpha=\arctan(z')$. z' ist hier der Anstieg der Membran im Punkt P und damit gleichzeitig die Neigung der Zylinderachse. Wir formen $\sin(\alpha)=R_2/A$ um in $A=R_2/\sin(\alpha)$. Mit $\tan(\alpha)=z'=\sin(\alpha)/\cos(\alpha)=\sin(\alpha)/(1-\sin^2(\alpha))^{1/2}$ erhalten wir durch Quadrieren $z'^2=\sin^2(\alpha)/(1-\sin^2(\alpha))$, daraus durch Auflösen nach $\sin^2(\alpha)$ die Gleichung $\sin^2(\alpha)=z'^2/(1+z'^2)$. Wir nehmen die positive Wurzel und setzen sie in die Gleichung $A=R_2/\sin(\alpha)$ ein und erhalten mit Gleichung (2) den gesuchten Wert der großen Halbachse.

$$A = (R_2\sqrt{1+z'^2})/z' \qquad (2)$$

Der nächste Rechenschritt ist die Bestimmung der Formel für den Krümmungsradius der Schnittellipse im Scheitelpunkt P. Die Ellipse liegt in der x-y-Ebene. Wir lösen die Ellipsengleichung $x^2/A^2+y^2/B^2=1$ nach x auf und erhalten für den positiven Zweig die Gleichung (3).

$$x(y) = A\sqrt{1-y^2/B^2} \qquad (3)$$

Wie Gleichung (1) zeigt, ist für die Berechnung des Krümmungsradius die Bestimmung von x' und x" erforderlich. Die Gleichungen (4) und (5) geben die beiden Ableitungen.

$$x' = \frac{-(Ay/B^2)}{\sqrt{1-y^2/B^2}} \qquad (4)$$

$$x'' = \frac{-(Ay^2/B^4)}{(1-y^2/B^2)^{3/2}} - \frac{A/B^2}{\sqrt{1-y^2/B^2}} \qquad (5)$$

Wir erhalten den gesuchten Krümmungsradius R_E im Scheitelpunkt P der Schnittellipse nach Gleichung (6).

$$R_E = ((1+x'^2)^{3/2})/|x''| \qquad (6)$$

Da im Scheitelpunkt y=0 ist, vereifachen sich die Ausdrücke für x' und x" erheblich. Es wird x'=0 (die Ellipse verläuft hier parallel zur y-Achse) und $x''=-A/B^2$. Sehen wir vom Vorzeichen ab, das ja lediglich die Richtung der Krümmung signalisiert, dann ist der gesuchte Krümmungsradius nach Gleichung (7) gegeben.

$$R_E = B^2/A \qquad (7)$$

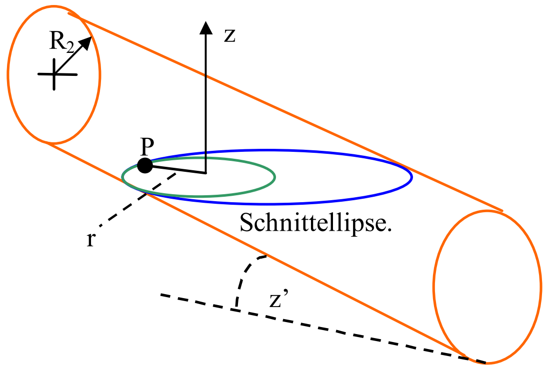


Abb. 5. Horizontale Schnittellipse

Wir setzen den Ausdruck für A aus Gleichung (2) in Gleichung (7) ein und erhalten wegen $B=R_2$ die Formel (8) für den Krümmungsradius im Punkt P.

$$R_E = R_2 z' / \sqrt{1+z'^2} \qquad (8)$$

Lösen wir diese Gleichung nach R_2 auf und ersetzen R_E durch r (beide Krümmungsradien, der der Ellipse und der des Kreises mit Radius r(P), sind gleich im Punkt P), dann erhalten wir die Gleichung (9) für den Radius des Schmiegezylinders.

$$R_2 = r\sqrt{1+z'^2} / z' \qquad (9)$$

Wir nutzen jetzt den zu Anfang gefundenen Tatbestand aus, dass ein sattelförmiges Stück Membran nur im Kräftegleichgewicht ist (hohe Membranspannung vorausgesetzt), wenn die beiden aufeinander senkrecht stehenden Schmiegekreise gleichen Radius haben. Das entspricht der Forderung $R_1=R_2$ aus Gleichung (10).

$$R_1 = R_2 \qquad (10)$$

Wir ersetzen zuerst in Gleichung (1) R_1 durch R_2 und dann R_2 durch den äquivalenten Ausdruck aus Gleichung (9) und lösen nach $|z''|$ auf . So erhalten wir den Ausdruck $|z''| = -z'(1+z'^2)/r$. Lösen wir das Betragszeichen auf, dann ist nur das positive Vorzeichen sinnvoll, denn es führt auf Lösungen mit der richtigen Krümmung in negative z-Richtung bei Annäherung an den Punkt r=0. Wir erhalten damit die gesuchte Gleichung (11) für die Krümmung einer 2-dimensionalen Membran im 3-dimensionalen Raum. Leider liefern die möglichen Lösungen dieser Gleichung nicht exakt das Newtonsche Gravitationsgesetz, sondern nur etwas Ähnliches.

$$z'' = -z'(1+z'^2)/r \qquad (11)$$

Jetzt ist es nur noch ein kleiner Schritt von der 2-dimensionalen Membran im 3-dimensionalen Raum zur 3-dimensionalen Membran im 4-dimensionalen Raum. Unser betrachtetes Membranstück wird zum Volumenstück ΔV. Die Gleichgewichtsbedingung für das Membranstück ändert sich nach Abbildung 6 insofern, dass nunmehr 2 tangentiale Kräftepaare Ft-Ft, d.h. 4 Einzelkräfte Ft auftreten, statt des einen Paares aus Abbildung 2. Das radiale Kräftepaar Fr-Fr muss das Gleichgewicht gegen 4 Tangentialkräfte halten. Bezeichnen wir drei Raumdimensionen (die bis auf kleine Abweichungen mit den unseren übereinstimmen) mit x,y,z, die neue Raumrichtung mit w, einen Radius innerhalb des Raumes (x,y,z) o.B.d.A. in x-Richtung liegend mit r, dann liegt der

Schmiegekreis zum Kräftepaar Fr-Fr in der r-w-Ebene, eines der Tangentialkräftepaare in der x-y-Ebene und das andere in der x-z-Ebene. Wir haben den r-w-Schmiegekreis mit Radius R_1 und zwei senkrecht zueinander stehende, gleich große Schmiegekreise in der x-y-Ebene und in der x-z-Ebene mit Radius R_2.

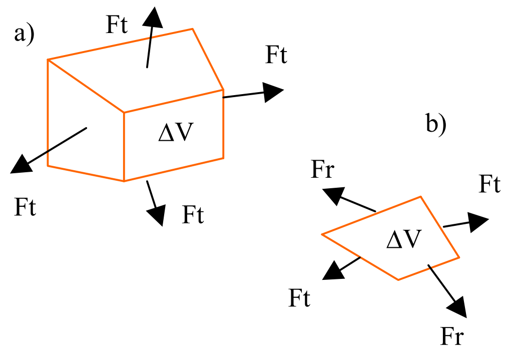


Abb. 6. Membranvolumenstück ΔV

Da der Betrag der Kräfteresultierenden (zumindest bei kleinen Krümmungen) eines Kräftepaares sich umgekehrt proportional zum Radius des Schmiegekreises verhält, gilt nunmehr für das Kräftegleichgewicht die Gleichung (12).

$$1/R_1 = 1/R_2 + 1/R_2 \qquad (12)$$

oder R_2=2 R_1. Wenn wir ab Gleichung (9) den Buchstaben z durch w ersetzen und Gleichung (10) durch R_2=2 R_1 ersetzen, kommen wir auf die gleiche Weise, mit der wir Gleichung (11) berechnet haben, auf Gleichung (13), die uns die Raumkrümmung unseres 3-dimensionalen Raumes in der vierten Dimension w in radialer Richtung zu einer kugelförmigen Masse beschreibt.

$$w''(r) = -\frac{2w'(r)(1+w'^2(r))}{r} \qquad (13)$$

Hier ist w die Raumtiefe. Als positive w-Richtung wählen wir die gedachte Expansionsrichtung. Da Raumkrümmung und Raumneigung selbst am Sonnenrand noch sehr klein sind, können wir den Term w'^2 im Zähler vernachlässigen, so dass sich die Gleichung (13) vereinfacht zu $w''(r)=-2w'(r)/r$. (Diese Vereinfachung und die Gleichsetzung von r mit der Bogenlänge auf der Membran machen den hauptsächlichen Unterschied unserer Näherungslösung zur exakten Lösung der Feldgleichungen aus, da wir damit die rechtwinklig angesetzten Koordinaten x,y,z mit unseren normalen, eigentlich schiefwinkligen Koordinaten gleich setzen und die geringfügige Vergrößerung des Abstandes r ignorieren.) Jede Funktion $w(r)=W_o+C/r$ ist eine Lösung der Gleichung (13). Differentiation von w(r) liefert $w'(r)=-C/r^2$. Betrachten wir Abbildung 7, dann erkennen wir, dass die Kraft $Fg=K\sin(\alpha)$ ist, wenn wir mit α den Neigungswinkel der Membran bezeichnen. Bei kleinen Neigungen, d.h. kleinem α, ist $\sin(\alpha)$ ungefähr gleich $\tan(\alpha)=w'$, und damit wird $Fg=Kw'$. Ersetzen wir w' durch $-C/r^2$, erhalten wir $Fg=-KC/r^2$. Das ist, bis auf die Festlegung der Konstanten K und C, Newtons Gravitationsgesetz für den Fall zweier kugelförmiger Massen.

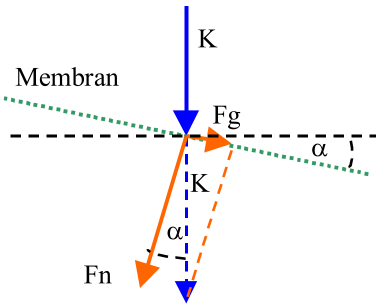


Abb. 7. Kräftezerlegung

3 Resümee

Es gelingt mit einer einfachen und seit langem benutzten Modellvorstellung die Raumkrümmung, wie sie sich aus Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie für die 4-dimensionale Raumzeit ergibt, für Kaluzas 4-dimensionalen Raum zu berechnen und daraus Newtons Gravitationsgesetz abzuleiten. Die Gravitationskonstante als Naturkonstante lässt sich jedoch so nicht berechnen, sie muss weiterhin gemessen werden.

Literatur

[1] Rüdiger Vaas: Modell Avantgarde, Bild der Wissenschaft, Heft 12, (2001).

[2] Adalbert Ruschel (1999): Arbeits- und Berufspädagogik für Ausbilder in Handlungsfeldern, Kiel Verlag, Ludwigshafen, 1. Auflage (1999)

[3] Josef Leisen: Qualitätssteigerung des Physikunterrichts durch Weiterent-wicklung der Aufgabenkultur, MNU 54 (2001) Nr. 7.

[4] Fliessbach, T: Allgemeine Relativitätst-heorie, Wissenschaftsverlag Mannheim (1990).

[5] Weber, S. v.: Membrane Theory of Gravity, Forschungsbericht der Fachhochschule Furtwangen, 1998